Primer Parcial Matemáticas 4 **Miguel Guzmán**

TIPO A

Pregunta 1

$$a.-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{e}\right)^{n}-\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\right)$$

Si tomamos el límite (Criterio del n-ésimo término) se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{e}\right)^{n}-\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\right)=0-\infty=-\infty\neq 0\ \ DIVERGE,$$

O bien se puede analizar las series por separado, recuerde que solo se puede separar si convergen las dos. Por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{n}\ \ Serie\ Geometrica\ con\ r=\frac{2}{e}<1\ CONVERGE$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\ \ Serie\ Geometrica\ con\ r=\frac{4}{3}>1\ \ DIVERGE$$

Ahora se sabe que una serie que converge + diverge = Diverge, pero demostrémoslo

Suponemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{e}\right)^{n}-\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\right)\ \ CONVERGE$$

Luego se puede sumar y restar series convergente por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{e}\right)^{n}-\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{n}-\left(\frac{4}{3}\right)^{n}-\left(\frac{2}{e}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}-\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$$

Por teorema la suma de serie debe ser convergente, pero como es estudio antes, esa serie resultante diverge, luego es FALSA la suposición, la serie original DIVERGE.

$$b.-\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Comparamos al límite con $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, tal que se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\overset{a=\frac{1}{\sqrt{n}}}{\Longrightarrow}\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a)}{a}\cos(a)=1$$

Son iguales las series, evaluemos entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad Serie\ P\ con\ p = \frac{1}{2} < 1\ \ DIVERGE,$$

Por comparación al límite, diverge la serie original

Pregunta 2

Factorizamos el denominador de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-3)(x-1)}$$

Por fracciones simple se puede tener que

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$$

Buscamos la serie geométrica de cada parte haciendo modificaciones pertinentes

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{-3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$$

Luego tenemos

$$f(x) = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}x\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

La primera converge para $\left|\frac{1}{3}x\right| < 1 \ \ => \ \ |x| < 3$ y la segunda para $|x| < 1$

Como las dos convergen entonces podemos simplificar un poco más

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

Y converge para la intersección de los conjuntos anteriores es decir $|x| < 1$

Pregunta 3

Sustituciones diversas, ya que el término

$$\frac{x^2 + y^2}{x}$$

Se repite, podemos realizar un cambio de variable igual a ese término (Resulta este cambio es un poco más laborioso pero sin embargo da, podía también realizar $z = x^2 + y^2$ y sale más fácil)

Sea

$$z = \frac{x^2 + y^2}{x} \quad => \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)(x) - (x^2 + y^2)}{x^2}$$

Observamos un poco la ecuación diferencial si dividimos todo por dx

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x}\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$$

Busquemos despejar la parte izquierda de la ecuación del cambio de diferencial

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)(x) - (x^2 + y^2)}{x^2} \;=>\; x^2\frac{dz}{dx} = \left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)x - (x^2 + y^2) \;=>$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x} + x\frac{dz}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} \;=>\; z + x\frac{dz}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

Sustituimos el cambio en la ecuación

$$z + x\frac{dz}{dx} = z\ln(z) \;=>\; x\frac{dz}{dx} = z(\ln(z) - 1) \;=>\; \frac{1}{z(\ln(z) - 1)}dz = \frac{dx}{x}$$

Integramos

$$\ln(\ln(z) - 1) = \ln(x) + C \;=>\; \ln(z) - 1 = Kx \;=>\; \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right) - 1 = Kx$$

Realizamos la condición inicial se tiene

$$\ln(2) - 1 = K$$

Por lo que la solución será

$$\boldsymbol{\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right) - 1 = (\ln(2) - 1)x}$$

RESULTADO EQUIVALENTE al que se obtiene por la otra sustitución.

Pregunta 4

De igual forma, sustituciones diversas notamos que $x + y$ se repite luego

$$z = x + y \;=>\; \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \;=>\; \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z^2 - 1}{2z + 2} \;=>\; \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - 1}{2z + 2} + 1 \;=>\; \frac{dz}{dx} = \frac{(z^2 + 2z + 1)}{2z + 2} \;=>\; \frac{2z + 2}{z^2 + 2z + 1}dz = dx$$

Integramos

$$\ln(z^2 + 2z + 1) = x + C$$

Regresamos el cambio

$$\ln((x + y)^2 + 2(x + y) + 1) = x + C$$

Aplicamos la condición inicial

$$\ln(1+2+1) = C \;\; => \quad C = 2\ln(2)$$

Luego la respuesta será

$$\boldsymbol{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 4e^x}$$

El ejercicio se resolvía más fácil si se da cuenta de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)^2 - 1}{2(x+y+1)} => \frac{dy}{dx} = \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{2(x+y+1)} => \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x+y-1)$$

Es una ecuación lineal primer orden ya que

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x-1)$$

Factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{2}dx} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

Luego nos queda que

$$\mu(x)y = \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{2}x}(x-1)dx + C$$

Integramos por parte y queda

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}(x-1) - 4e^{-\frac{1}{2}x}\right) + C\right) \;=>\; y = \frac{1}{2}(-2(x-1) - 4) + Ce^{\frac{1}{2}x}$$

Evaluamos la condición inicial

$$1 = \frac{1}{2}(-2) + C \;\; => \quad C = 2$$

La respuesta será

$$\boldsymbol{y = -x - 1 + 2e^{\frac{1}{2}x}}$$

RESPUESTA EQUIVALENTE NUMERICAMENTE A LA OTRA.

PREGUNTA 5

Reducción de orden

$$y'' = \frac{y'}{y^2}$$

Tercer caso, se sugiere que

$$u = y' \qquad y \qquad y'' = \frac{du}{dy}u$$

Aplicamos el cambio de variable

$$u\frac{du}{dy}=\frac{u}{y^2} \quad => \quad du=\frac{dy}{y^2} \quad => \quad u=-\frac{1}{y}+C_1$$

Regresamos el cambio de variable.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1y-1}{y} \quad => \quad \frac{y}{C_1y-1}dy=dx$$

Dividimos la fracción de función de (y)

$$\frac{1}{C_1}-\frac{1}{C_1}\frac{1}{C_1y-1}dy=dx$$

Integramos

$$\boldsymbol{\frac{y}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\ln(C_1y-1)=x+C_2}$$